

Věta 1 (Euler-Lagrangeova rovnice). *Nechť $f \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ a y je stacionárním bodem funkcionálu F . Potom je funkce*

$$x \mapsto f_z(x, y(x), y'(x))$$

*spojitě diferencovatelná na $[a, b]$ a platí (tzv. **Euler-Lagrangeova rovnice**)*

$$f_y(x, y(x), y'(x)) - (f_z(x, y(x), y'(x)))' = 0, x \in [a, b]. \quad (1)$$

Poznámky a příklady. 1. (regularita minimizéru) *pokud je y stacionárním bodem F a pro nějaké $\xi \in (a, b)$ platí*

$$f_{zz}(\xi, y(\xi), y'(\xi)) \neq 0.$$

Potom existuje $\delta > 0$, že y je C^2 na okolí ξ .

2. (Lagrangeova nutná podmínka) *pokud je y bodem minima funkcionálu F . Potom*

$$f_{zz}(x, y(x), y'(x)) \geq 0, \quad x \in [a, b].$$

3. (Legendrova postačující podmínka) *pokud je y stacionárním bodem funkcionálu F a pokud existují $\alpha, \delta > 0$, že*

$$d^2\Phi_{h,h}(u) \geq \alpha \|h\|^2, \quad h \in X, \|h\| < \delta,$$

potom y je bodem minima.

4. (Lagrangeova postačující podmínka) *pokud je y stacionárním bodem funkcionálu F . Jestliže existuje $\delta > 0$, že pro každé $h \in X$, $\|h\| < \delta$ splňuje funkce $\varphi : t \mapsto F(y + th)$ podmínku*

$$\varphi''(t) \geq 0, \quad t \in (0, 1).$$

Potom F má v bodě y lokální minimum.

Věta 2 (konvexita a extrém). *Pokud je zobrazení $(u, v) \mapsto f(x, u, v)$ konvenční pro všechna $x \in [a, b]$ a $y \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F . Potom má F v bodě y minimum.*

Definice 3 (Jacobiho rovnice a konjugovaný bod). *Nechť $f \in C^3([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F . Položme*

$$P(x) = f_{zz}(x, y(x), y'(x))$$

a

$$Q(x) = f_{yy}(x, y(x), y'(x)) - (f_{yz}(x, y(x), y'(x)))'.$$

Rovnici

$$-(Ph')' + Qh = 0$$

*nazýváme **Jacobiho rovnici**. Bod $x \in (a, b]$ nazveme **konjugovaným bodem** k bodu a , pokud existuje netriviální řešení Jacobiho rovnice h , pro které platí $h(a) = h(x) = 0$.*

Věta 4 (Jacobiho). *Nechť $f \in C^3([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu F a platí*

$$f_{zz}(x, y(x), y'(x)) > 0, \quad x \in [a, b].$$

Potom

- 1. pokud na $(a, b]$ neexistuje konjugovaný bod k bodu a , potom y je bodem lokálního minima funkcionálu F na M .*
- 2. pokud je y bodem lokálního minima funkcionálu F na M , potom na (a, b) neexistuje konjugovaný bod k bodu a .*